



Doctoral Thesis

Dedekind symbols and some applications of the spectral theory of Kloosterman sums

Author(s):

Burrin, Claire

Publication Date:

2016

Permanent Link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-010802627> →

Rights / License:

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#) →

This page was generated automatically upon download from the [ETH Zurich Research Collection](#). For more information please consult the [Terms of use](#).

Diss. ETH No. 23634

Dedekind symbols and some applications of the
spectral theory of Kloosterman sums

A thesis submitted to attain the degree of

Doctor of Sciences of ETH Zürich
(Dr. sc. ETH Zürich)

presented by

Claire Burrin

M.Sc. ETH in Mathematics
born on November 15, 1987
citizen of Genève, GE

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Alessandra Iozzi, examiner
Prof. Dr. Arpad Tóth, co-examiner

2016

Abstract

Dedekind symbols arise as generalized Dedekind sums for non-uniform lattices in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. The construction was first introduced in work of Goldstein (1973) and their study has, since then, been mainly restricted to principal congruence subgroups and Hecke triangle groups. However, their algebraic structure, the building block of this thesis, sheds light on some more general aspects of the theory of Dedekind sums.

We prove the reciprocity law for Dedekind symbols associated to Hecke triangle groups, thereby suggesting that the reciprocity law for Dedekind sums is not arithmetic in nature. Then, extending work of Vardi (1987), we show that Dedekind symbols are encoded in Selberg–Kloosterman sums.

This relation leads us to two new applications of the spectral theory of Kloosterman sums. The first one is the equidistribution mod 1 of the values of Dedekind symbols, which confirms that the rich structure of Dedekind sums goes beyond their association to the modular group.

Our second application is of a more geometric nature; we show that any two closed horocycles (i.e. periodic orbits of the horocyclic flow in the unit tangent bundle of a hyperbolic surface) intersect as we let them expand and contract (respectively), and the set of intersections becomes, on average, jointly equidistributed along their trajectories. Bounds on sums of Kloosterman sums provide a quantitative rate of equidistribution.

Résumé

Il existe une construction de sommes de Dedekind pour tout groupe fuchsien non cocompact (Goldstein, 1973), dont l'étude s'est jusqu'ici principalement limitée aux sous-groupes de congruence et aux groupes triangle de Hecke. L'analyse de la structure algébrique de ces symboles de Dedekind, à la base de cette thèse, nous conduit aux résultats suivants.

Tout d'abord, concernant les groupes de Hecke, on démontre la loi de réciprocité pour les symboles de Dedekind. Cela indique que la célèbre loi de réciprocité des sommes de Dedekind n'est pas lié à la structure arithmétique du groupe modulaire. Nous montrons ensuite que les symboles de Dedekind sont liées à des sommes de Kloosterman étudiées par Selberg. Notons que pour les sommes de Dedekind, cette très jolie observation est due à Vardi (1987).

Cette relation nous mène à deux nouvelles applications de la théorie spectrale des sommes de Kloosterman. La première est l'équirépartition, modulo 1, des valeurs des symboles de Dedekind. La seconde concerne le comportement asymptotique d'une paire d'horocycles fermés dans le fibré unitaire tangent d'une surface hyperbolique. En augmentant la période de l'un des deux horocycles, on montre que les deux orbites s'intersectent et que, asymptotiquement, l'ensemble des points d'intersections s'équirépartit le long de leurs deux trajectoires. De plus, on obtient une version quantitative de ce résultat grâce à certaines bornes pour des sommes de sommes de Kloosterman.